RÉPUBLIQUES TCHÈQUE ET SLOVAQUE
MATURITA BILINGUE
SESSION DE MAI 2012

Epreuve de mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est constitué de 5 exercices. Les cinq exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n°1
(sur 6,75 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-2x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On note (D) la droite d'équation $y=-2x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x on a $f'(x)=(e^{x}+1)(e^{x}-2)$.

   b) Etudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions notées α_1 et α_2.

   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de chacun de ces nombres.

4. Déterminer la limite de $f(x)+2x$ quand x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

5. a) Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

   b) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) et la droite (D).

6. Calculer en **cm²** l'aire du domaine délimité par la courbe (C), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 2$.

Exercice n°2
(sur 2,75 points)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher.
Trois de ces boules sont rouges et numérotées 1, 2 et 3.
Quatre de ces boules sont vertes et numérotées 1, 2, 3 et 4.
Les cinq dernières sont jaunes et numérotées 5, 6, 7, 8 et 9.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une boule de l'urne : on observe le chiffre de cette boule.
On remet la boule dans l'urne et on reproduit cette opération deux fois encore (les tirages étant indépendants). On obtient dans l'ordre trois chiffres *a*, *b* et *c* formant le nombre *abc*.
Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « On obtient le nombre 125. »
B : « On obtient un multiple de 5. »
C : « On obtient un nombre pair. »

2. On tire *simultanément* et au hasard quatre boules de l'urne.
Calculer les probabilités des événements suivants :

D : « Les boules sont toutes de la même couleur. »
E : « Il y a au moins une boule de couleur jaune. »
F : « Chacun des chiffres 3, 4, 5, 6 apparaît au moins une fois. »
G : « On obtient quatre chiffres pairs. »

Exercice n°3
(sur 3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Donner chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

3. On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et déterminer son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de *n* et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

Exercice n°4
(sur 4,5 points)

QCM - Pour chacune des questions ci-dessous, exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie et donner la justification de cette réponse. Chaque bonne réponse avec la justification rapporte 0,75 point, chaque bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

Les questions sont indépendantes.

Dans les questions suivantes le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Soit z un nombre complexe ; une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

   a) 3 b) i c) $3+i$ d) aucune réponse correcte

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

   a) $|i\bar{z}+1|$ b) $|z-1|$ c) $|z|+1$ d) aucune réponse correcte

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ d) aucune réponse correcte

4. Soit n un nombre naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

   a) $n=3$ b) $n=6k+3, k\in\mathbb{N}$ c) $n=6k, k\in\mathbb{N}$ d) aucune réponse correcte

5. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ est :

   a) la droite (AB) b) le cercle de diamètre $[AB]$
   c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O d) aucune réponse correcte

6. Soient A et B deux points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a) $1-4i$ b) $-3i$ c) $7+4i$ d) aucune réponse correcte

Exercice n°5
(sur 3 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère dans le plan complexe l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 2\overline{z}^2 - 3z^2 + z - \frac{5}{2}$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' des nombres réels. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2. Montrer que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur a pour équation cartésienne : $x^2 - y^2 - x + \frac{5}{2} = 0$.

3. Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) et préciser ses éléments caractéristiques (le centre, les axes, les foyers, les sommets et les équations des asymptotes éventuelles).

4. Tracer (Γ) dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.